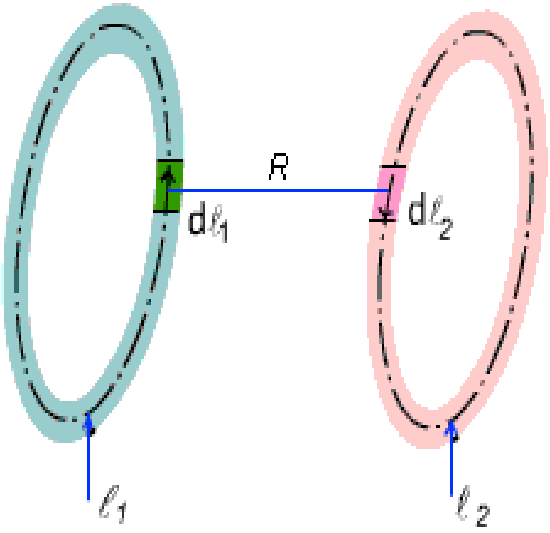
第五章 电磁感应与磁场能量

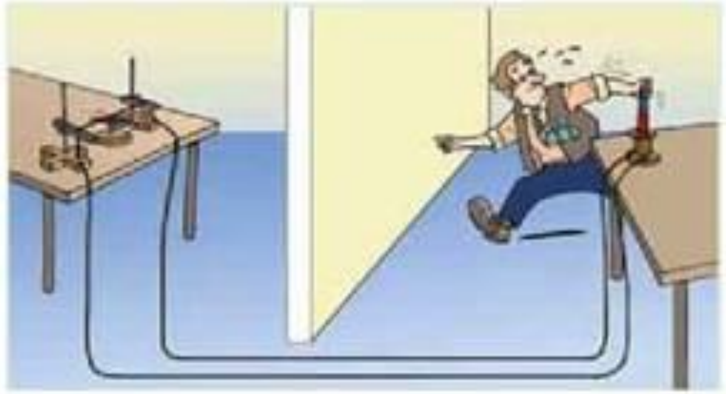
本章目录：

§ 5.1 法拉第电磁感应定律

§ 5.2 电感的定义与计算

§ 5.3 磁场的能量

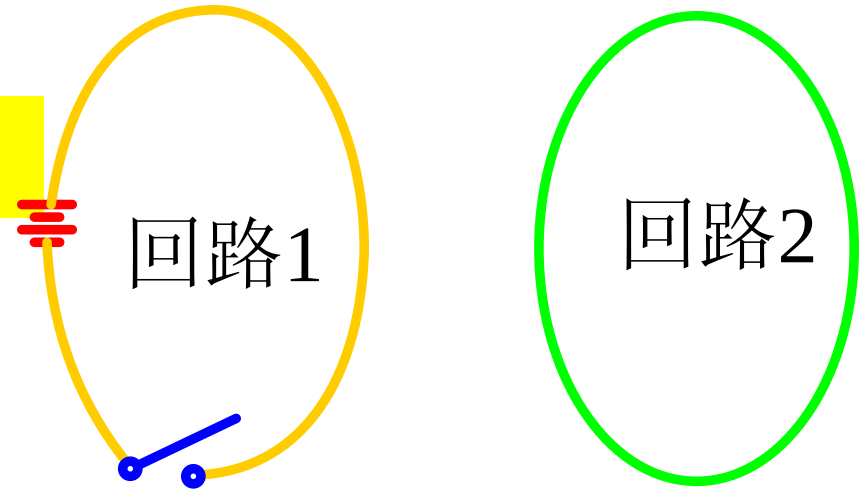




跑来跑去的科拉顿

§5.1法拉第电磁感应定律

一、电磁感应现象



①回路1接通或断开时，会在回路2上感应出瞬变电流；当回路1成为电流恒定时，感应电流也消失。

②回路1载有恒定电流，但回路1相对于回路2有相对运动或回路1运动，回路2静止，或回路2运动，回路1静止，也会产生感应电流。

③永久性磁铁插入或抽出，若磁铁静止时，电路中没有电流，插入或抽出的过程中会有电流。

§5.1法拉第电磁感应定律

法拉第把这些现象归结为：①回路的磁通量随时间变化与否引起的②变化的磁通量在回路周围产生一个感应电场，这个感应电场的环路积分就是感生电动势。它的环路积分不为0，与静电场不同。

此时回路2上没有外加电源，只能认为感生电动势是磁场引起，法拉第还进行了定量研究，得出了感生电动势和磁通量随时间的变化率成正比。

$$\xi \sim \frac{d\Phi}{dt}$$

§5.1法拉第电磁感应定律

楞次确定了感生电动势的方向具有这样的规则：感生电动势总是试图阻碍磁通量的变化。也就是说，感生电动势产生感生电流，感生电流对回路产生一个附加的磁通。这个磁通与原来的磁通变化符号相反，削弱原来的磁通变化。

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt}$$

§ 5.1法拉第电磁感应定律

①回路静止，$\vec{B}$随时间变化

$$\left.\begin{aligned}\xi=\oint_l \vec{E}\cdot dl=-\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot ndS=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot ndS\\ \oint_l \vec{E}\cdot dl=\int_s \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

②回路以匀速v运动，$\vec{B}$不随时间变化

$$\xi=\oint_l \vec{E}'\cdot dl=-\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot ndS$$

$\vec{E}'$的坐标随时间变化

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

运动坐标系　　　静止坐标系

§ 5.1法拉第电磁感应定律

③回路以匀速$\vec{v}$运动，$\vec{B}$随时间变化

$$\xi = \oint_l \vec{E}' \cdot dl = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

设$\hat{n}dS$不随时间变化，

即回路以恒定速度$\vec{v}$运动，回路形状不变

$$\because \frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{B}\left(x, y, z, t\right) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) + \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B})$$

§ 5.1法拉第电磁感应定律

$$\therefore \left.\begin{aligned} &\xi = \oint_l \vec{E}' \cdot dl = \int_s \left\{ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right\} \cdot \hat{n} dS \\ &\oint_l \vec{E}' \cdot dl = \int_s \nabla \times \vec{E}' \cdot d\vec{S} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

若$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$（即第二种情况）$\Rightarrow \nabla \times \vec{E}' = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$

第一种情况$\vec{v} = 0$，$\vec{E} = \vec{E}' \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

§5.1法拉第电磁感应定律

我们要把它转回静止参考系，主要问题是不同参考系的电场强度如何变换。

考虑到以$\vec{v}$运动电荷所受的力

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}=\vec{F}'=q\vec{E}'\Rightarrow\vec{E}'=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\therefore \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

该方程是精确的，虽然伽利略不变性是近似的，更严格的应用狭义相对论。

§ 5.1法拉第电磁感应定律

例1、（1）有一线圈，

其面积为S，法向为$\hat{n}$，

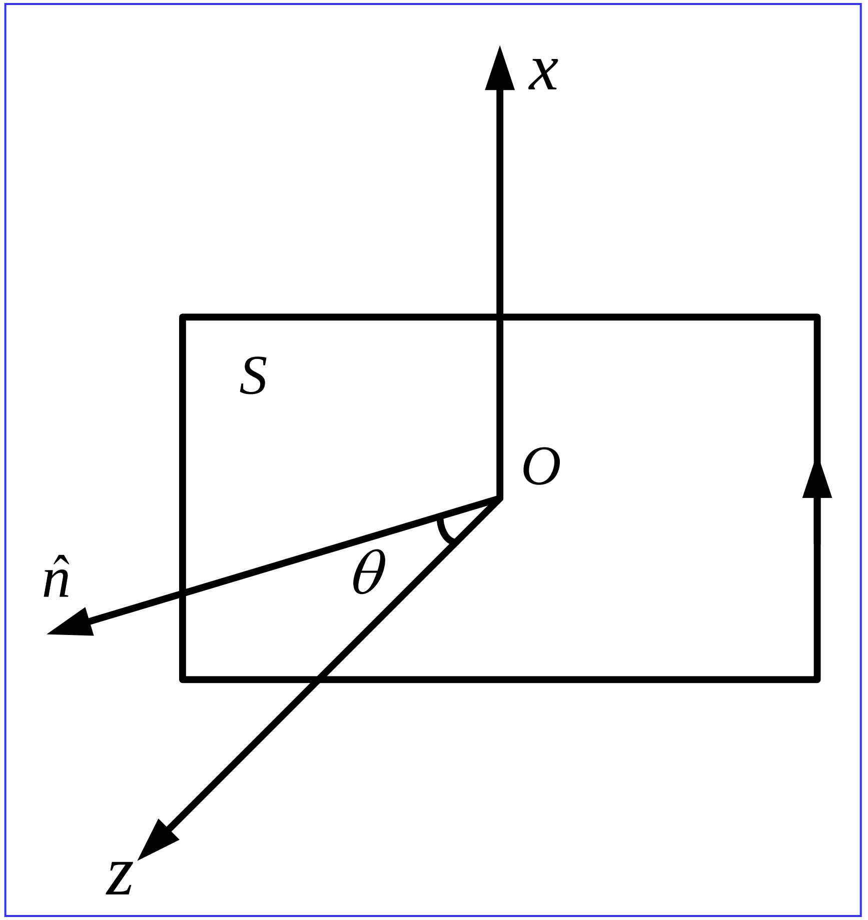
$\vec{B}=B_0\sin(wt)\hat{z}$，求$\xi$

解：$\xi=\oint_l \vec{E}\cdot dl$

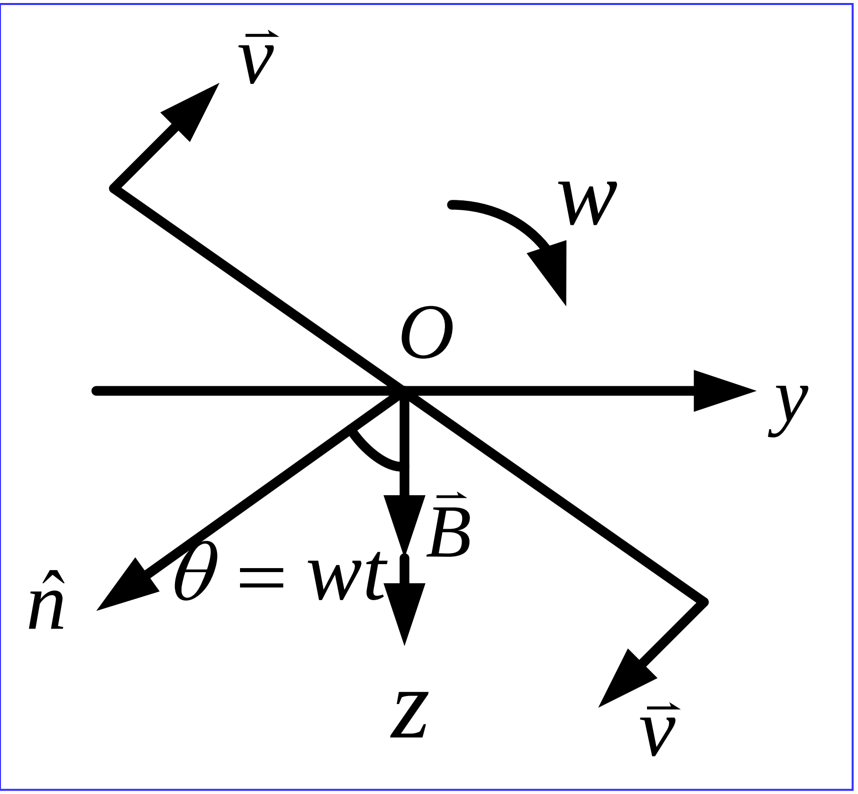
$$=-\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot ndS$$

$$=-\frac{d}{dt}\int_s B_0\sin(wt)\hat{z}\cdot ndS$$

$$=-wB_0S\cos(wt)\cos\theta$$



§5.1法拉第电磁感应定律



(2)$\vec{B} = B_0 \hat{z}$，线圈以角速度w绕x轴转动, 求ξ

解：某一时刻$\theta = wt + \theta_0$,

其中$\theta_0 = 0\big|_{t=0}$

$$\xi = \oint_l \vec{E} \cdot dl = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot ndS$$

$$= -\frac{d}{dt}(B_0 S \cos\theta)$$

$$= wB_0 S \sin\left(wt + \theta_0\right)$$

或：$\xi = \oint_l \vec{E}' \cdot dl = \int_s \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot ndS$

$$= \int_l \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l} = wB_0 S \sin\left(wt\right)$$

§5.1法拉第电磁感应定律

准静态场（本身是一个时变场，但其行为与静态场一样）条件为

$$\frac{l}{\lambda} \ll 1$$

可忽略其波动效应时，比如求交流电引起的磁场，先将其视为恒定静磁场，然后将其中恒定电流换成交流电流。

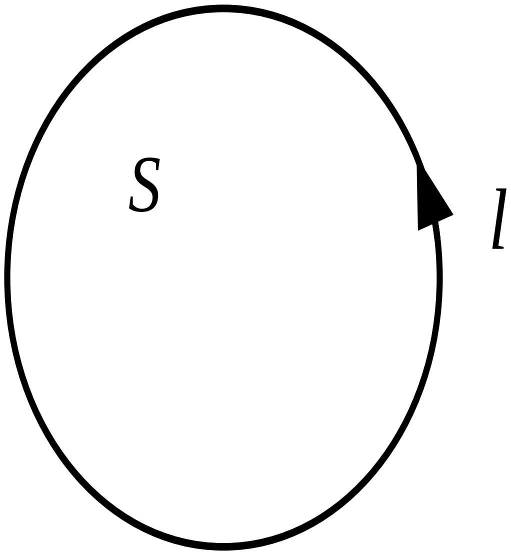
§5.2 电感的定义与计算

一、磁通Φ 和磁链ψ

1、单个回路

$\Psi=\Phi=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}$　　单位：韦伯（Wb）

（此时磁通即为磁链，含义相同）



§ 5.2 电感的定义与计算

2、螺线管（N匝线圈）

穿过S面的全磁通即为磁链

$$\Psi=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

严格计算非常困难。

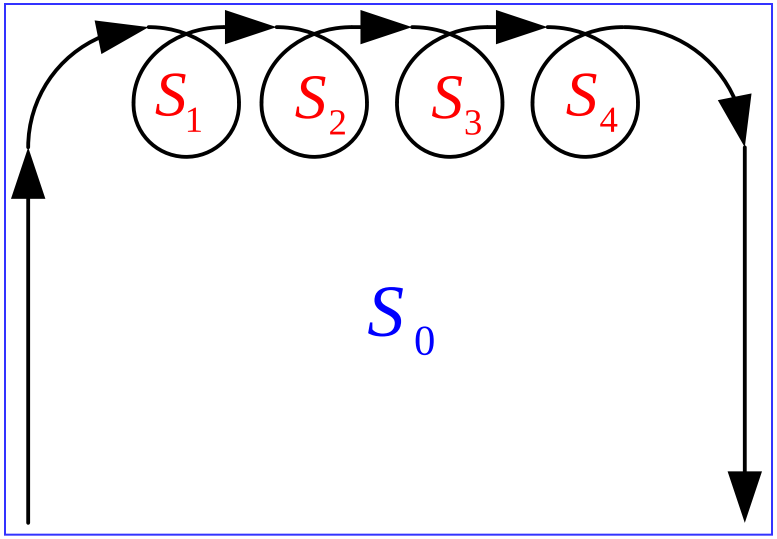
设各匝线圈是紧贴着的，

则可以近似认为回路的

每匝线圈是闭合的，

这样复杂的曲面S就可以近似

为$S_1, S_2 \ldots\ldots S_0$之和。



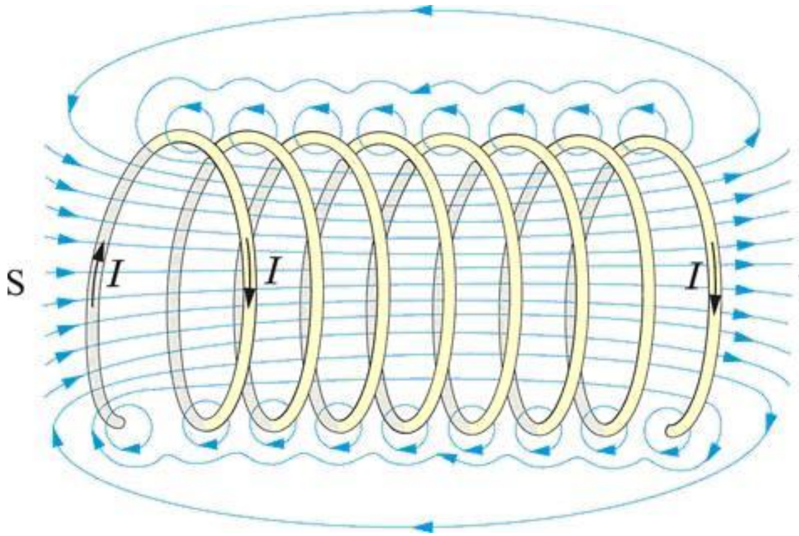
$$\therefore \Psi=\int_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{S}+\int_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{S}+\cdots+\int_{S_N} \vec{B}\cdot d\vec{S}+\int_{S_0} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

§ 5.2 电感的定义与计算

若 N 较大

- 可以认为通过每个线圈的磁通近似相等，忽略两端的边缘效应
- 忽略穿过 S_0 的磁通

$$\therefore \Psi = N\int_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{S} = N\Phi$$



Φ为穿过单个线圈的磁通

即将磁链表示为总磁通

§ 5.2 电感的定义与计算

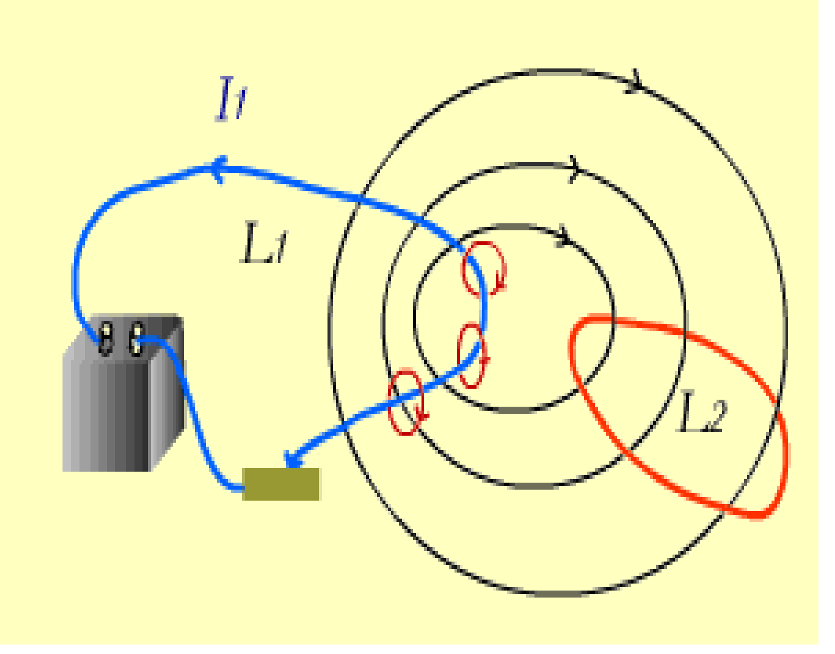
二、互感与自感

1、互感

（注：无限长电流情况也可以认为是闭合的（无限远处闭合））

$$\psi_{21} = \int_{s_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

（回路1电流的磁场在回路2产生的磁链）



电流 I_1 产生与回路2交链的磁链

§ 5.2 电感的定义与计算

由毕奥-沙法尔定律： $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_1} \dfrac{I_1 d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$

，知 $\psi_{21} \sim I_1$ 成比例关系

定义：$M_{21} = \dfrac{\Psi_{21}}{I_1}$ 称为回路1对回路2的互感

单位：亨利（H）

M_{21}只与l_1和l_2回路的几何形状以及它们之间的相对位置有关而与电流的大小无关（与电容相似）

§ 5.2 电感的定义与计算

同样：$\psi_{12} = \int_{s_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} \sim I_2$

定义：$M_{12} = \dfrac{\Psi_{12}}{I_2}$ 称为回路2对回路1的互感

单位：亨利（H）

性质：$M_{21} = M_{12}$（互易性），反映了场点与源点的对称性

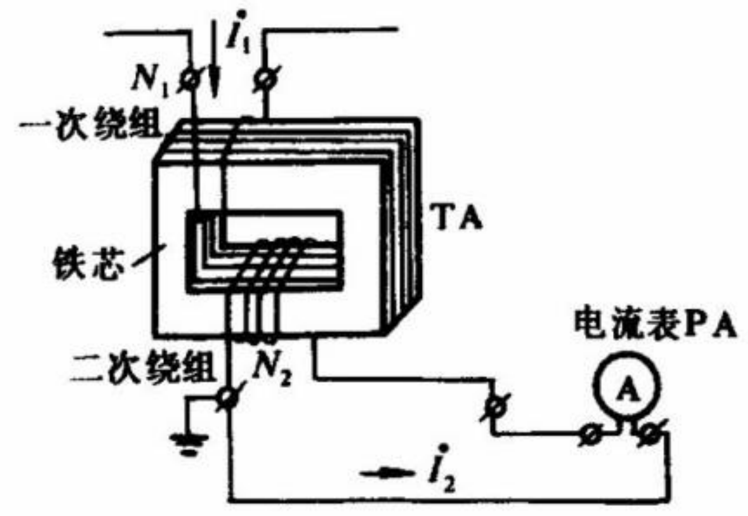


图 1　电流互感器工作原理图

（即：将同样大小的电流放在回路1，而在回路2观察它所产生的磁通，等于将电流放在回路2时，在回路1产生的磁通。（或者说，当两种情况所放的电流大小不等时，磁链与电流之比相等））

§ 5.2 电感的定义与计算

证：$\psi_{21} = \int_l \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$　　　$\vec{A}_1 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\dfrac{I_1 d\vec{l}_1^{\,'}}{R}$ →电流分布在有限空间时

$$\Rightarrow M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l}^{\,'}\cdot d\vec{l}_2}{R} = M_{12} \rightarrow \text{诺曼公式}$$

（实际计算时，一般不用此公式，一般用先求$\vec{B}$或$\vec{A}$ → 磁通的方法）

（注：当电流不是分布在有限空间时，可用比奥—沙伐尔定律证明）

计算互感的一般步骤：

$$I_1 \rightarrow \vec{H}_1 \rightarrow \vec{B}_1 \rightarrow \Phi_2 = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \rightarrow \Psi_2 \rightarrow M = \frac{\Psi_2}{I_1}$$

§ 5.2 电感的定义与计算

例：计算互感M

解：$\vec{B}_a = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\theta}$

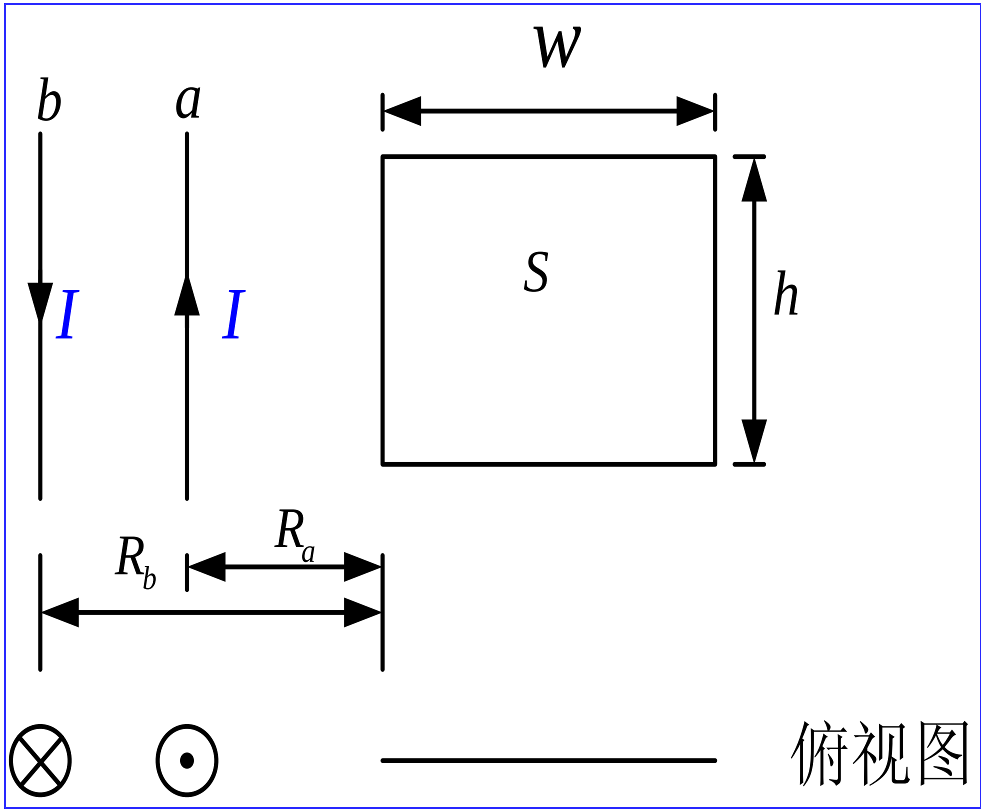
$$\psi_a = \int_s \vec{B}_a \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{R_a}^{R_a+w} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} h d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_a + w}{R_a}$$

$$\psi_b = \int_s \vec{B}_b \cdot d\vec{S} = \int_{R_b}^{R_b+w} -\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} h d\rho$$

$$= -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_b + w}{R_b}$$



§5.2 电感的定义与计算

$$\psi = \psi_a + \psi_b$$

$$\Rightarrow M = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{(R_a + w) R_b}{(R_b + w) R_a}$$

当$R_b \to \infty$（舍掉b）

$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{(R_a + w)}{R_a}$$

即单根导线和矩形回路之间的互感

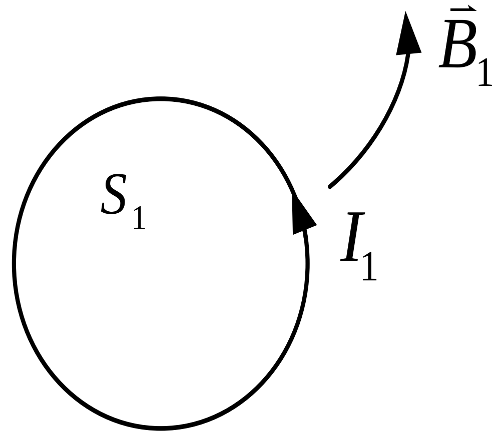
（注意：虽有$M_{21} = M_{12}$（互易性），

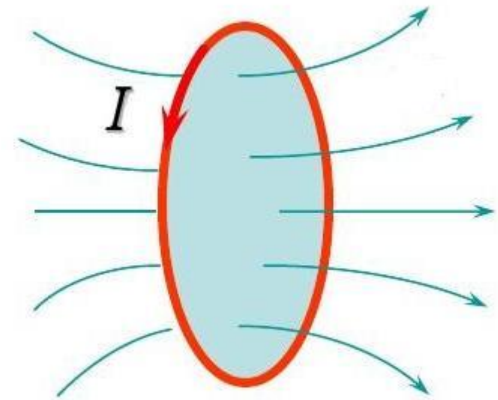
但计算M_{21}和M_{12}的复杂程度不一样）

§ 5.2 电感的定义与计算

2、自感

$L_{11}=\dfrac{\psi_{11}}{I_1}$，称为回路1的自感





$L_{22}=\dfrac{\psi_{22}}{I_2}$，称为回路2的自感

回路1的总磁链：$\psi_1=L_{11}I_1+M_{12}I_2$

回路2的总磁链：$\psi_2=M_{21}I_1+L_{22}I_2$

§ 5.2 电感的定义与计算

自感的诺曼公式：

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \int_{l_1} \frac{d\vec{l}_1{}' d\vec{l}_1}{R} \qquad L_{22} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \int_{l_2} \frac{d\vec{l}_2{}' d\vec{l}_2}{R}$$

$$R = \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|$$

$\sim \ln \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|$以对数规律趋于无穷

当回路电线为线电流时，（即横截面尺寸忽略不计）由于磁感应强度在线电流所在位置为无穷大，因此自感为无穷大。

原因：因为截面面积不为零，忽略尺寸认为R为零是种过度近似。

§ 5.2 电感的定义与计算

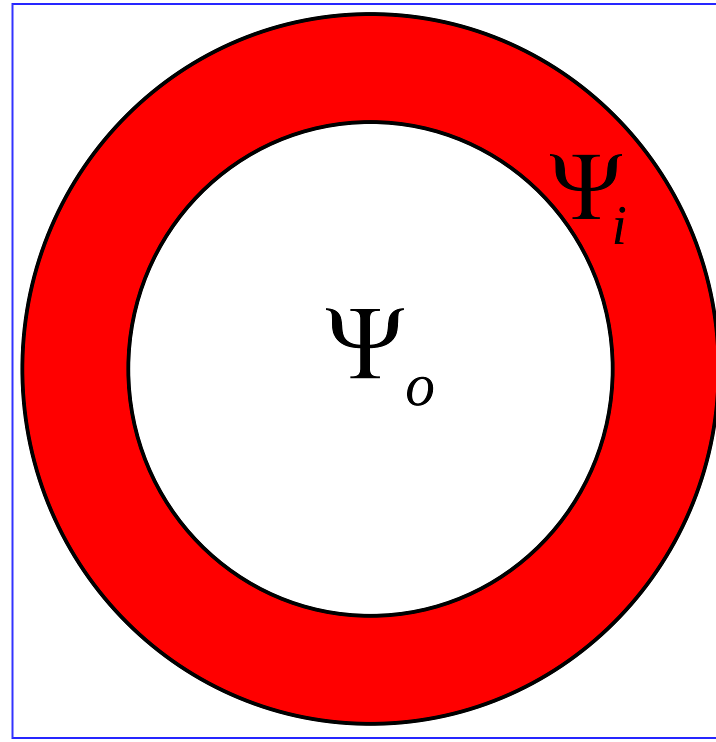
仅考虑单个回路

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_o$$

磁链

导线内部的磁链

导线外部的磁链



定义：$L_i = \dfrac{\Psi_i}{I}$ 为回路的内自感

$L_0 = \dfrac{\Psi_o}{I}$ 为回路的外自感

§ 5.2 电感的定义与计算

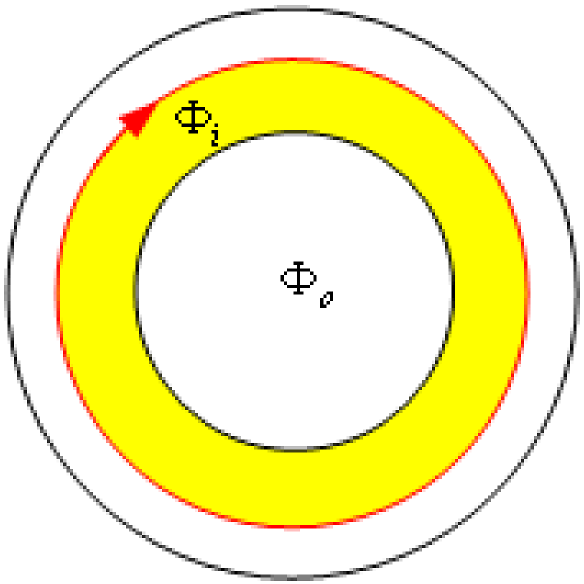
体电流回路自感磁链的定义：

当把体电流回路分解成无限细闭合电流管回路时，各电流管回路磁通量的加权平均值。其中电流管的电流为加权平均的权。

$$\therefore \Psi = \frac{1}{I}\int_s \Phi_l J ds = \frac{1}{I}\int_s \Phi_l \vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad L = \frac{\Psi}{I}$$

$$又\Phi_l = \Phi_{i(内)} + \Phi_{o(外)} \Rightarrow \Psi = \Psi_i + \Psi_o$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_o &= \frac{\Phi_0}{I}\int_s \vec{J}\cdot d\vec{S} = \Phi_0 \\ \Psi_i &= \frac{1}{I}\int_s \Phi_i \vec{J}\cdot d\vec{S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = \underset{\substack{\downarrow \\ 内自感}}{L_{i内}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 外自感}}{L_{o外}}$$

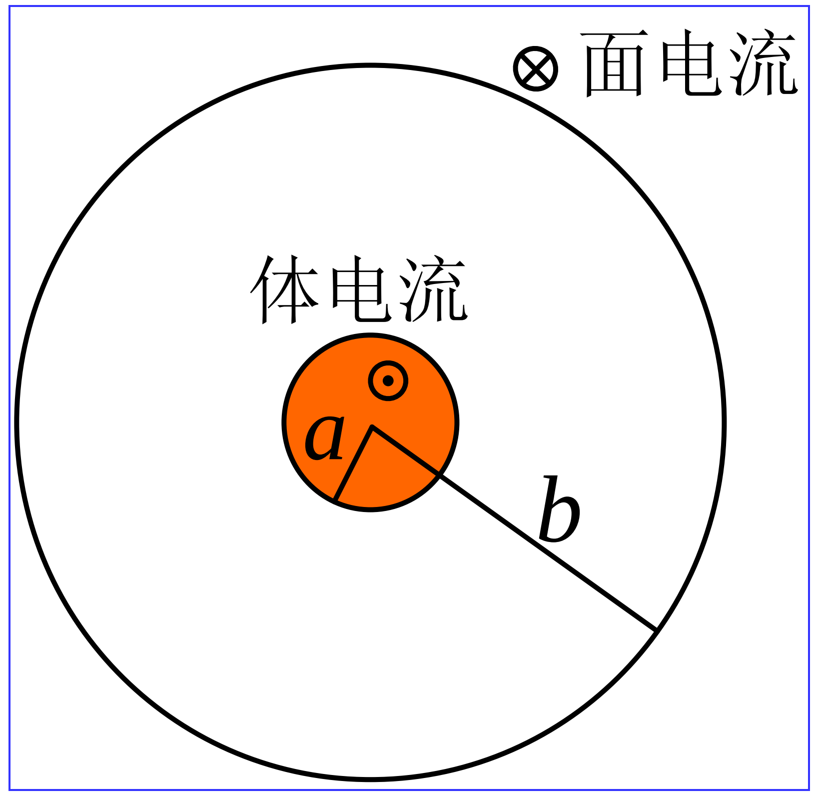


§ 5.2 电感的定义与计算

例：求同轴线单位长度的自感L

解：根据对称性$\Rightarrow \vec{B}=B_\theta\hat{\theta}$

$$B_\theta=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2} & \rho<a\\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & a<\rho<b\\ 0 & \rho>b\end{cases}$$



§ 5.2 电感的定义与计算

$$\Phi = \int_{\rho}^{a} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} d\rho + \int_{a}^{b} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = \underset{(\text{内磁通})}{\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\left(a^2 - \rho^2\right)} + \underset{(\text{外磁通})}{\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}$$

$$\Psi = \frac{1}{I}\int_s \Phi \cdot J \cdot dS, \quad \text{由} \frac{JdS}{I} = \frac{\rho d\theta d\rho}{\pi a^2}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{\mu_0 I}{8\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} ln \frac{b}{a} \Rightarrow L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

内自感，来自导体内部的磁链

外自感，来自内外部导体自间的磁链

§5.3 磁场的能量

与研究静电场能量的方法完全类似

静磁场：磁场是由电流产生的，电流的建立需要一个过程，它是一个从零开始到有最后逐步达到平衡的状态的过程，在这一过程外加电压所做的功就是贮存在磁场的能量，也就是说磁场能量是由外加电压做功转换得来的（符合能量守恒原理）

而且磁场本身不能对运动电荷即电流做功（由洛伦兹公式）

§5.3 磁场的能量

考虑两个回路，形状位置不随时间变化。并假设

- 媒质为线性
- 磁场建立无限缓慢（不考虑涡流及辐射）；
- 系统能量仅与系统的最终状态有关，与能量的建立过程无关

$$W_m = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}L_{11}I_1{}^2 + M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2{}^2$$

$$= \frac{1}{2}(L_{11}I_1 + M_{12}I_2)I_1 + \frac{1}{2}(M_{21}I_1 + L_{22}I_2)I_2$$

$$= \frac{1}{2}\Psi_1 I_1 + \frac{1}{2}\Psi_2 I_2$$

磁场能量的推导过程

§ 5.3 磁场的能量

其中：$\frac{1}{2}L_{11}I_1{}^2$：回路1的固有能

$M_{12}I_1I_2$：回路1和回路2的相互作用能； $\frac{1}{2}L_{22}I_2{}^2$：回路2的固有能

由n个回路的系统：$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \Psi_i$

其中Ψ_i为第i个回路的总磁链

对体电流（分布在有限空间），则分解成电流管

$$W_m = \frac{1}{2}\int_S [JdS\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}\,] = \frac{1}{2}\int_S \oint_l \vec{A}\cdot \vec{J}dSdl = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot \vec{J}dV$$

§ 5.3 磁场的能量

有介质时，只需要求由自由电流产生的能量，而磁化电流产生的能量不考虑,∵自由电流消失，磁化电流也消失

$$\therefore W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}_f dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)dV$$

$$= \frac{1}{2}\oint_S (\vec{H}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV$$

单位：J（焦耳）, 利用$\nabla\bullet(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\bullet(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\bullet(\nabla\times\vec{b})$

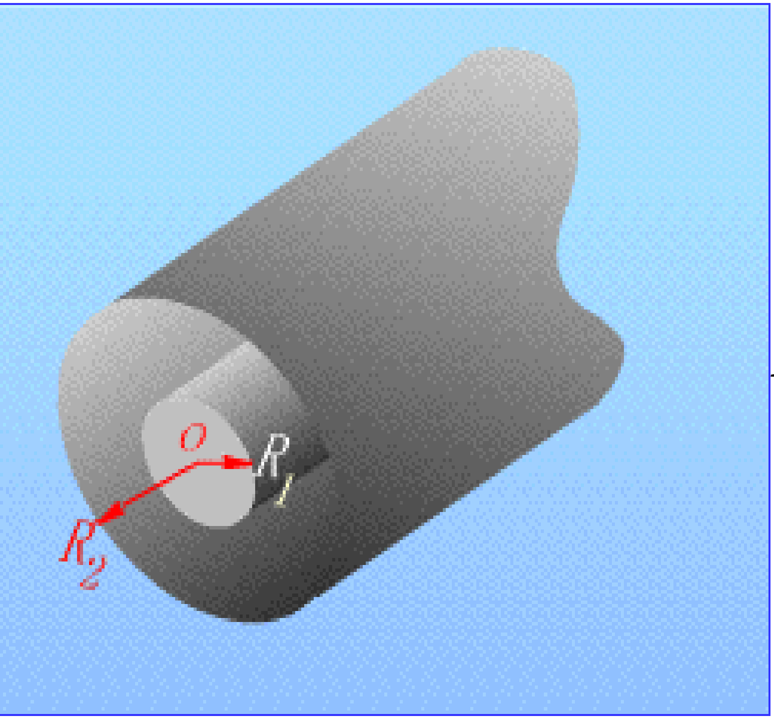
$\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$称为磁场的能量密度，代表单位体积内存储的磁场能量

单位：J/m^2（焦耳每平方米）

上式表明磁能是以磁能密度的形式储存在整个场域中。

§ 5.3 磁场的能量

例：长度为 l，内外导体半径分别为 R_1 与 R_2 的同轴电缆，通有电流 I，试求电缆储存的磁场能量与自感。



$$\vec{H} = \begin{cases} \dfrac{I'}{2\pi\rho}\hat{\phi} = \dfrac{\rho I}{2\pi R_1^2}\hat{\phi} & 0 < \rho < R_1 \\ \dfrac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi} & R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \rho > R_2 \end{cases}$$

§ 5.3 磁场的能量

磁能为

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV \quad = \frac{1}{2}\int_V \mu_0 H^2 dV$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left[\int_0^{R_1}\left(\frac{\rho I}{2\pi R_1^2}\right)^2 l2\pi\rho d\rho + \int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 l2\pi\rho d\rho\right.$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right]$$

自感 $$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right]$$

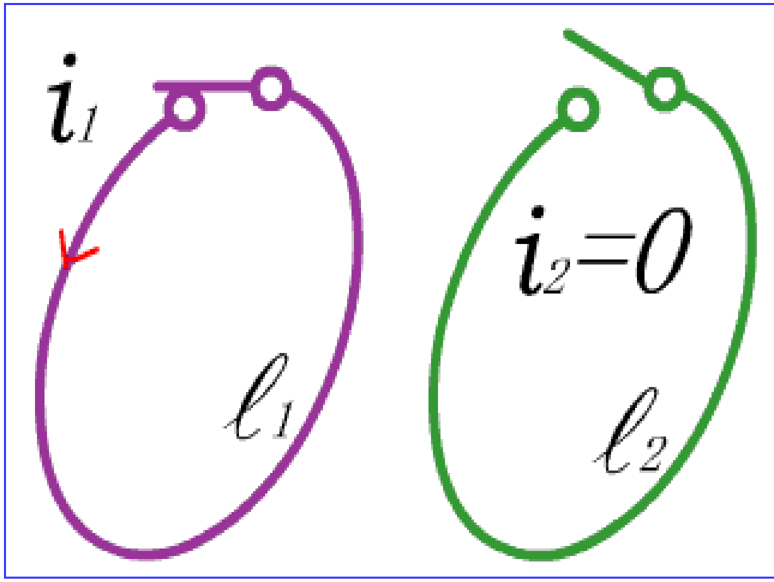
§ 5.3 磁场的能量

I_1，I_2：达到平衡状态时的电流

i_1，i_2：达到平衡状态前的电流

(1) $i_1 = 0 \rightarrow I_1$　　$i_2 \equiv 0$　　W_1

(2) $i_1 \equiv I_1$　　$i_2 = 0 \rightarrow I_2$　　W_2



第一步：回路1的电流在dt时间内为：$i_1 \rightarrow i_1 + di_1$

回路1和回路2的磁链将发生变化，分别为$d\Psi_{11}$和$d\Psi_{21}$，所以回路1和回路2将产生感生电动势：

$$\xi_1 = -\frac{d\Psi_{11}}{dt}, \quad \xi_2 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt}$$

§ 5.3 磁场的能量

感生电动势ξ_1是阻止i_1的增加，因此外加电源必须做功抵消这个感生电动势，才能保证i_1的顺利增加；也就是说必须提供一个外加电源$-\xi_1$抵消这个感生电动势。

同样，在回路2中也必须有外加电压$-\xi_2$，以保持$i_2 \equiv 0$

所以，外加电源做的功为：

$$dW_1 = -\xi_1 i_1 dt - \xi_2 i_2 dt = i_1 d\Psi_{11} = L_{11} i_1 di_1$$

$$\therefore W_1 = \int_0^{I_1} L_{11} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_{11} I_1^{\ 2}$$

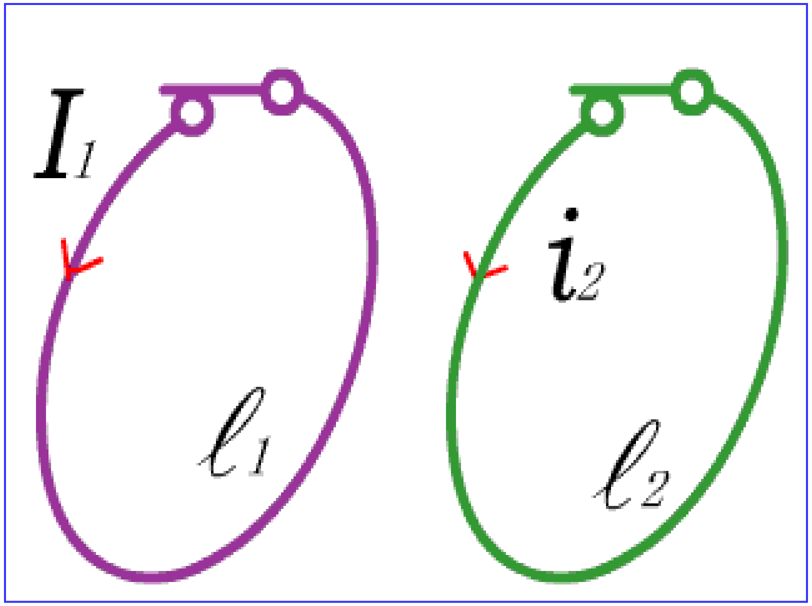
§ 5.3 磁场的能量

第二步：

回路1的电流保持I_1

回路2的电流在dt时间内为

$$i_2 \rightarrow i_2 + di_2$$



回路1和回路2的磁链将发生变化，分别为$d\Psi_{12}$和$d\Psi_{22}$，

所以回路1和回路2将产生感生电动势：

$$\xi_1 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}, \quad \xi_2 = -\frac{d\Psi_{22}}{dt}$$

§ 5.3 磁场的能量

所以，外加电源做的功为：

$$dW_2 = -\xi_1 i_1 dt - -\xi_2 i_2 dt = I_1 d\Psi_{12} + i_2 d\Psi_{22} = I_1 M_{12} di_2 + L_{22} i_2 di_2$$

$$\therefore W_2 = \int_0^{I_2} \left(I_1 M_{12} di_2 + L_{22} i_2 di_2 \right) = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2{}^2$$

$$\therefore W_m = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} L_{11} I_1{}^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2{}^2$$

$$= \frac{1}{2}(L_{11} I_1 + M_{12} I_2) I_1 + \frac{1}{2}(M_{21} I_1 + L_{22} I_2) I_2$$

$$= \frac{1}{2} \Psi_1 I_1 + \frac{1}{2} \Psi_2 I_2$$

返回